Λογικές προτάσεις – Προτασιακός Λογισμός

Λογική πρόταση (ή απλά πρόταση) καλείται μια έκφραση με πλήρες νόημα, η οποία με τρόπο αντικειμενικό (κ' όχι υποκειμενικό) μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής

π.χ (i) Ο Ντάλι είναι ο καλύτερος ζωγράφος
(ii) Η Λαμία είναι ωραία πόλη

Οι παραπάνω εκφράσεις παρότι που σύμφωνα με το συντακτικό της Ελληνικής γλώσσας αποτελούν προτάσεις, δεν είναι λογικές προτάσεις

Οι εκφράσεις:
(iii) Ο αριθμός 12 είναι πολλαπλάσιο του 3
(iv) Ο αριθμός 14 είναι πολλαπλάσιο του 5
(v) Το πρωτάθλημα Ελλάδας το 2019 στο ποδόσφαιρο κατέκτησε ο ΠΑΟΚ.

Είναι λογικές προτάσεις οι (iii),(v) είναι αληθείς, η (iv) είναι ψευδής. Οι (iii),(iv) έχουν μαθηματικό περιεχόμενο, ενώ η (v) όχι. Κυρίως ενδιαφερόμαστε για προτάσεις με μαθηματικό περιεχόμενο.

Οι χαρακτηρισμοί αληθής (σύμβ A) κ' ψευδής (σύμβ Ψ) που αποδίδουμε με κάποια λογική πρόταση αποτελούν τιμές αλήθειας.
Η απόδοση της τιμής A ή Ψ σε μια (λογική) πρόταση καλείται αποτίμηση της πρότασης. Συνήθως θα συμβολίζουμε τις προτάσεις με γράμματα του λατινικού αλφαβήτου p, q, r, s, t

Λογικοί σύνδεσμοι - κατασκευή νέων προτάσεων από παλιές

1) Άρνηση πρότασης

Αν p είναι μία πρόταση με την προσθήκη του συνδέσμου "όχι" (ή "δεν" ή "μη") προκύπτει η πρόταση "όχι p" κ' συμβολίζεται με ~p (ή ~~με ¬p~~)

π.χ. p: ο αριθμός 3 είναι περιττός
q: ο αριθμός 6 είναι πρώτος
προκύπτουν οι προτάσεις
~p: Ο αριθμός 3 δεν είναι περιττός
~q: Ο αριθμός 6 δεν είναι περιττός

Ο επόμενος πίνακας δείχνει την αποτίμηση της πρότασης ~p συναρτήσει της αποτίμησης της πρότασης p

p	~p
Α	Ψ
Ψ	Α

Ο πίνακας αυτός δείχνει ότι όταν η p είναι αληθής η ~p είναι ψευδής κ' όταν η p είναι ψευδής η ~p είναι αληθής

2) Σύζευξη προτάσεων

Αν p,q δύο προτάσεις με την προσθήκη του συνδέσμου προκύπτει η πρόταση "p κ' q" η οποία συμβολίζεται "p∧q".

π.χ. αν έχουμε τις προτάσεις: "p": ο αριθμός 7 είναι άρτιος
"q" ο αριθμός 20 είναι άρτιος
με τη χρήση λογικού συνδέσμου "και" προκύπτει η σύζευξη p∧q που είναι η πρόταση "ο αριθμός 7 είναι άρτιος κ' ο αριθμός 20 είναι άρτιοι"

Ο πίνακας αλήθειας για την πρόταση p∧q συναρτήσει τις αποτιμήσεις των p,q είναι ο εξής:

p	q	p∧q
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

Ο πίνακας αυτός δείχνει ότι η $p \wedge q$ είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που οι p, q είναι κ' οι δύο αληθείς

3) Εγκλειστική διάζευξη

ή απλά διάζευξη δύο προτάσεων.

Αν p, q δύο προτάσεις με χρήση του συνδέσμου "ή" προκύπτει η πρόταση "p ή q" η οποία συμβολίζεται "$p \vee q$"

p	q	$p \vee q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

Η $p \vee q$ θεωρείται ψευδής μόνο στην περίπτωση που οι p, q είναι κ' οι δύο ψευδείς

4) Συνεπαγωγή

Από δύο προτάσεις p, q προκύπτει η πρόταση.

"Αν p τότε q" αλλιώς "p συνεπάγεται q" η οποία συμβολίζεται $p \Rightarrow q$

Δύο ακόμα εκφράσεις που χρησιμοποιούνται είναι οι εξής "Η p είναι ικανή συνθήκη για την q" "Η q είναι αναγκαία συνθήκη για την p"

p	q	$p \Rightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

από Α δεν μπορούμε να βρούμε ψέμα

από ψέμα μπορούμε να βρούμε την αλήθεια

Συμπεραίνουμε ότι η $p \Rightarrow q$ είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που η p είναι Α κ' η q είναι Ψ

Η p καλείται υπόθεση κ' η q συμπέρασμα της πρότασης $p \Rightarrow q$.

$\alpha = \beta \Rightarrow \lambda\alpha = \lambda\beta$

5) Ισοδυναμία προτάσεων

Αν p, q είναι δύο προτάσεις προκύπτει η πρόταση
« p αν κ' μόνο αν q»
« p τότε κ' μόνο τότε q»
« η p είναι ικανή κ' αναγκαία συνθήκη για την q»
« η p είναι ισοδύναμη της q»

Η πρόταση συμβολίζεται με $p \Leftrightarrow q$

Πίνακας αλήθειας:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Ο πίνακας αυτός δείχνει η $p \Leftrightarrow q$ είναι αληθής όταν p, q είναι κ' οι δύο αληθείς ή κ' οι δύο ψευδείς

6) Αποκλειστική διάζευξη προτάσεων

Από δύο προτάσεις p, q προκύπτει η πρόταση «ή μόνο p ή μόνο q» η οποία συμβολίζεται με $p \veebar q$

p	q	$p \veebar q$
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

η $p \veebar q$ είναι αληθής μόνο όταν μία από τις p, q είναι αληθής

Αν έχουμε κάποιες λογικές προτάσεις p, q, r... με χρήση λογικών συνδέσμων μπορούμε να κατασκευάσουμε σύνθετες προτάσεις

π.χ. $(p \wedge q) \Rightarrow \{[(\sim p) \vee (\sim q)] \wedge r\}$

περιέχει 3 προτάσεις

p	q	r	$p\wedge q$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p)\vee(\sim q)$	$[(\sim p)\vee(\sim q)]\wedge r$	$(p\wedge q)\Rightarrow[(\sim p)\vee(\sim q)\wedge r]$
Α	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α

Ορισμός: Μια σύνθετη πρόταση που κατασκευάζεται από μία ή περισσότερες απλές προτάσεις $p, q, r, \ldots$ με χρήση λογικών συνδέσμων, θα λέγεται ταυτολογία αν είναι αληθής για κάθε αποτίμηση των προτάσεων που περιέχεται σε αυτήν.

Ορισμός: Δύο προτάσεις r, t λέγονται ισοδύναμες αν η $r \Leftrightarrow t$ είναι ταυτολογία.

π.χ ταυτολογίες

(i) $p \Leftrightarrow p\wedge p$

(ii) $p \Leftrightarrow p\vee p$

(iii) $p \Leftrightarrow (\sim(\sim p))$

(iv) $p\vee(\sim p)$

(v) $\sim(p\wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p)\vee(\sim q)]$ } Κανόνας του De Morgan

(vi) $\sim(p\vee q) \Leftrightarrow ((\sim p)\wedge(\sim q))$

(vii) $p\wedge q \Leftrightarrow \sim[(\sim p)\vee(\sim q)]$

(viii) $p\vee q \Leftrightarrow \sim[(\sim p)\wedge(\sim q)]$

(ix) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p\wedge(\sim q))$

απαγωγή σε άτοπο

(x) $(p\Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q)\Rightarrow(\sim p))$

αντιθετοαντιστροφή

(xi) $(p\Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim p)\vee q]$

(xii) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [\sim(p \wedge (\sim p)) \wedge \sim(q \wedge (\sim p))]$

(xiii) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

(14) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

(15) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ← επιμεριστική της σύζευξης ως προς τη διάζευξη

(16) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Για κάποιες από αυτές θα ελέγξουμε ότι είναι πράγματι ταυτολογίες

για την 9) (ix)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim(p \wedge (\sim q))$	(ix)
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α

Για την (iv)

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α

καταλαβαίνουμε ότι είναι ταυτολογία όταν η τελευταία στήλη είναι Α.

Για την 15)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

Σημείωση: Το γεγονός ότι οι προτάσεις $(p\wedge q)\wedge r$ κ' $p\wedge(q\wedge r)$ είναι ισοδύναμες μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε για αυτές τον (κοινό) συμβολισμό $p\wedge q\wedge r$
Έτσι, θα γράφουμε $p\wedge q\wedge r$ εννοείται(;;;) $(p\wedge q)\wedge r$

$p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge p_4$ είναι το ίδιο με $((p_1\wedge p_2)\wedge p_3)\wedge p_4$
Γενικότερα γράφεται $p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\ldots\wedge p_{k-1}\wedge p_k$
εννοούμε $(\ldots((p_1\wedge p_2)\wedge p_3)\wedge\ldots)\wedge p_{k-1})\wedge p_k$
Η πρόταση αυτή είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που όλες οι $p_1\ldots p_k$ είναι αληθείς

Λογικές αποδείξεις

Ορισμός: Αν $p_1\ldots p_k, q$ είναι λογικές προτάσεις κ' η πρόταση $(p_1\wedge\ldots p_k)\Rightarrow q$ είναι ταυτολογία λέμε ότι έχουμε μια λογική απόδειξη με υποθέσεις τις $p_1,\ldots p_k$ κ' συμπέρασμα την q

Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε το σχήμα
$$\begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_k \\ \hline q \end{array}$$

Τα παρακάτω σχήματα, όπως είδαμε μπορούμε να ελέγξουμε, αποτελούν λογικές αποδείξεις.

$$\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array} \quad \begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ p\Rightarrow r \\ \hline p\Rightarrow r \end{array} \quad \begin{array}{c} p\vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array} \quad \begin{array}{c} p\wedge p \\ \hline p \end{array} \quad \begin{array}{c} p \\ \hline p\vee p \end{array} \quad \begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

Για να δείξουμε ότι το σχήμα $\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$ αποτελεί λογική απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι η πρόταση $\to$ $[(p\Rightarrow q)\wedge p]\Rightarrow q$ είναι ταυτολογία.

$\longrightarrow$

p	q	p=>q	(p=>q)∧p	[(p=>q)∧p]=>q
A	A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	A

άρα είναι ταυτολογία, γιατί βγήκε αλήθεια σε όλες τις δυνατές περιπτώσεις

Άρα το σχήμα $\dfrac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$ αποτελεί λογική απόδειξη

Για να το σχήμα $\dfrac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \end{array}}{p \Rightarrow r}$ αποτελεί λογική απόδειξη, αρκεί να η $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ είναι ταυτολογία

p	q	r	p=>q	q=>r	(p=>q)∧(q=>r)	p=>r	[(p=>q)∧(q=>r)]=>(p=>r)
A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	A
A	Ψ	A	Ψ	A	Ψ	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	A	A	A	A	A	A
Ψ	A	Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A	A	A	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A	A	A

Σύνολα - Βασικές έννοιες

Διαισθητικός ορισμός

Σύνολο είναι μία καθορισμένη συλλογή αντικειμένων (κ' αποτελεί το ίδιο ένα καινούργιο αντικείμενο). Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο ονομάζονται στοιχεία συνόλου

Συνήθως (αλλά όχι πάντα) συμβολίζουμε τα σύνολα με κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου κ' τα στοιχεία τους με μικρά γράμματα.

Σύνολα A, B, Γ, Δ $\quad C, D, X, Y$

Στοιχεία $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, b, c, d $\quad x, y, z, w$

Αν A είναι ένα σύνολο κ' x ένα αντικείμενο $\exists$ 2 αμοιβαίως αποκλειόμενες περιπτώσεις

<u>1η περίπτωση</u>. Το x ανήκει στο σύνολο A (ή αλλιώς το x είναι στοιχείο του A) κ' το συμβολίζουμε $x \in A$

<u>2η περίπτωση</u>. Το x δεν ανήκει στο σύνολο A (ή αλλιώς το x δεν είναι στοιχείο του A) κ' το συμβολίζουμε $x \notin A$

Η δεύτερη περίπτωση είναι η άρνηση της πρώτης

$$\sim(x \in A) \Leftrightarrow x \notin A$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω A, B δύο σύνολα. Λέμε ότι <u>το A είναι υποσύνολο του B</u> αν κάθε στοιχείο που ανήκει στο σύνολο A ανήκει κ' στο σύνολο B.

Συμβολίζουμε $A \subseteq B$.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Αν $A \subseteq B$ λέμε επίσης ότι <u>το B είναι υπερσύνολο του A</u> κ' χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $B \supseteq A$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B \supseteq A$$

<u>Ορισμός</u> (αρχή της έκτασης)

Δύο σύνολα A κ' B λέγονται ίσα αν ισχύει $A \subseteq B$ κ' $B \subseteq A$. Συμβολίζουμε $A = B$

Έτσι, $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \land B \subseteq A)$

Όταν το A δεν είναι υποσύνολο του B, συμβολίζουμε $A \nsubseteq B$

Αυτό σημαίνει ότι $\exists x$ με $x \in A$ κ' $x \notin B$

Όταν το A δεν είναι ίσο με το B. Συμβολίζουμε $A \neq B$

$A \neq B \Leftrightarrow \sim(A=B) \Leftrightarrow \sim(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow [\sim(A \subseteq B)] \vee [\sim(B \subseteq A)] \Leftrightarrow A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A$

$\Leftrightarrow \exists x$ με $(x \in A \wedge x \notin B)$ ή $\exists x$ (με $x \in B \wedge x \notin A$)

Ιδιότητες της "$\subseteq$"

(α) $A \subseteq A$ $\forall A$ σύνολο (αυτοπαθής ή ανακλαστική ιδιότητα)

(β) Αν $A \subseteq B$ κ' $B \subseteq A$ τότε $A = B$ (αντισυμμετρική ιδιότητα)

(γ) Αν $A \subseteq B$ κ' $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)

Ορισμός: Λέμε ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B (συμβ $A \subset B$) (χρησιμοποιείται κ' ο συμβολισμός $A \subsetneq B$) αν ισχύει $A \subseteq B$ κ' $A \neq B$

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι το B είναι γνήσιο υπερσύνολο του A κ' συμβολίζεται $B \supset A$. Εξ' ορισμού $A \subset B \Leftrightarrow B \supset A$.

Ορισμός: Το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο ονομάζεται κενό σύνολο κ' συμβολίζεται με $\emptyset$ (ή με $\{\}$)

Για κάθε σύνολο A ισχύει $\emptyset \subseteq A$.